көбейтіп, (*в*)-теңдеуге қосамыз; осылайша, (*а*)-теңдеуді $(-a_{41})$ – ге көбейтіп (*г*)-теңдеуге қосамыз. Нәтижеде 1-қадамнан соң, мына жүйеге келеміз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, & (\partial) \\ \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}, & (e) \\ \quad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}, & (ж) \\ \quad b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 = b_{45}, & (з) \end{cases}$$

(*е*), (*ж*) және (*з*) теңдеулерде x_1-дің коэффициенттері нөлге айналдырылды.

2-қадам. (*д*) теңдеуді түрлендірмейміз. (*е*), (*ж*) және (*з*) теңдеулерді 1-қадамдағыдай түрлендіреміз және т. с. с. Нәтижеде бастапқы жүйе түрленіп, мына сатылы көрініске келеді:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ \quad x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = c_{25}, \\ \quad\quad x_3 + d_{34}x_4 = d_{35}, \\ \quad\quad\quad x_4 = e_{45}. \end{cases}$$

Енді бұл жүйені кері ретпен шешсек, x_4, x_3, x_2 және x_1-лерді табамыз.

Егер берілген жүйенің жалғыз шешімі болса, онда түрленген теңдеулердің сатылы жүйесі үшбұрыштық түрге келеді, яғни соңғы теңдеуде тек бір белгісіз қалады. Ал берілген жүйе үйлесімсіз болса, онда түрленген сатылы жүйе кемінде бір $0=1$ теңдеуге ие болады, яғни сол жақтағы белгісіздердің алдындағы коэффициенттер нөлге тең болып, оң жағы нөлге тең болмайды.

Егер берілген жүйе анықталмаған болса, яғни белгісіздердің саны тәуелсіз сызықтық теңдеулердің санынан артық болса, онда жүйенің ақырсыз көп шешімі болады. Бұл жағдайда түрленген сатылы жүйе үшбұрыштық түрге келмейді. Себебі соңғы теңдеуде бірнеше белгісіз қалады. Соңғы теңдеуде бір белгісізді қалғандары арқылы өрнектесек (бұларды еркін белгісіздер дейміз), онда біртіндеп басқа белгісіздерді де осы еркін белгісіздер арқылы өрнектейміз. Мұндай шешімді берілген жүйенің жалпы шешімі деп атаймыз. Еркін белгісіздерге әр түрлі мәндер беріп, жалпы шешімнен дербес шешімді табамыз.

Крамер формуларын қолданып, төмендегі теңдеулер жүйелерін шешіңіз:

2.90. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$

Шешуі. (2.12) Крамер формулаларын қолданып шешеміз. Ол үшін керекті анықтауыштарды есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2 = 3 \neq 0\,; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 7 = 6\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - (-1)\cdot 2 = 9\,.$$

Демек $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6}{3} = 2\,;\; x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{9}{3} = 3\,.$

Жүйенің матрицасы $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$ мен кеңейтілген $\overline{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{Vmatrix}$

матрицаның рангі $rangA = rang\overline{A} = 2$ екендігін ескереміз.

2.91 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі. (2.12) Крамер формулаларын қолдану үшін керек болған анықтауыштарды, олардың қасиеттерін пайдалана отырып, түрлендіріп есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (2) \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ (1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (2) \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ (1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 55 - 40 = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (2) \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ (1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = 60 - 55 = 5;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \leftarrow \\ \end{matrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-7) = 10.$$

(2.12) формулалар бойынша:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2.$$

Берілген жүйенің матрицасы $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ және кеңейтілген

матрица $\overline{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{Vmatrix}$ рангілері бірдей екендігі, яғни

$rangA = rang\,\overline{A} = 3$, байқалады.

Теңдеулер жүйелерін шешіңіз:

2.92. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$

2.93. $\begin{cases} \sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 11, \\ 4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0. \end{cases}$

2.94. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

2.95. $\begin{cases} x_1 - \sqrt{5}x_2 = 0, \\ 2\sqrt{5}x_1 - 5x_2 = 10. \end{cases}$

2.96. $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases}$

2.97. $\begin{cases} ax - y = 2, \\ 2x + ay = 1. \end{cases}$

2.98. $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$

2.99. $\begin{cases} 3x - 4y = -6, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$

2.99a. $\begin{cases} 2x + 5y = 7, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$

2.100. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 3z = 34. \end{cases}$

2.101. $\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$

2.102. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.103. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

2.104. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

$$\textbf{2.105.}\begin{cases}5x_1+2x_2+5x_3=4,\\3x_1+5x_2-3x_3=-1,\\-2x_1-4x_2+3x_3=1.\end{cases}\qquad \textbf{2.106.}\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=0,\\2x_1-x_2+4x_3=5,\\3x_1+x_2-x_3=2.\end{cases}$$

$$\textbf{2.107.}\begin{cases}3x_1-3x_2+2x_3=2,\\4x_1-5x_2+2x_3=1,\\5x_1-6x_2+4x_3=3.\end{cases}\qquad \textbf{2.108.}\begin{cases}3x_1+2x_2-4x_3=8,\\2x_1+4x_2-5x_3=11,\\4x_1-3x_2+2x_3=1.\end{cases}$$

$$\textbf{2.109.}\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1,\\x_1-2x_2+4x_3=3,\\3x_1-x_2+5x_3=2.\end{cases}\qquad \textbf{2.110.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\2x_1-x_2-x_3=1,\\x_1+3x_2+4x_3=6.\end{cases}$$

$$\textbf{2.111.}\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3=0,\\x_1+2x_2-x_3=1,\\x_1+4x_2+3x_3=2.\end{cases}$$

$$\textbf{2.112.}\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\2x_1-x_2+x_3=2,\\3x_1+2x_2+2x_3=-2.\end{cases}$$

теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешіңіз.

Шешуі. Берілген жүйені түрлендіріп, үшбұрыштық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1, & (-2)\quad(-3)\\2x_1-x_2+x_3=2, & \hookleftarrow\qquad |\\3x_1+2x_2+2x_3=-2 & \qquad\quad\hookleftarrow\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\3x_2-x_3=0,\\8x_2-x_3=-5.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\x_2-\dfrac{1}{3}x_3=0,(-8)\\8x_2-x_3-5\quad\hookleftarrow\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1,\\x_2-\dfrac{1}{3}x_3=0,\\\dfrac{5}{3}x_3=-5.\end{cases}$$

Соңғы жүйені біртіндеп кері ретпен шешсек: $x_3=-3; x_2=-1$; $x_1=-2$. Бұл жүйенің матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангі 3-ке тең екендігін атап өтеміз.

$$\textbf{2.113.}\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\x_1+2x_2-3x_3=0,\\-2x_1-2x_3=16.\end{cases}$$

Шешуі. Гаусс әдісін қолданып, берілген жүйені түрлендіреміз:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4, & (-1)\quad(2)\\x_1+2x_2-3x_3=0, & \hookleftarrow\qquad |\\-2x_1-2x_3=16. & \qquad\quad\hookleftarrow\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\x_2-2x_3=4,\ (-2)\\2x_2-4x_3=8.\hookleftarrow\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\x_2-2x_3=4,\\0\cdot x_2-0\cdot x_3=0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\x_2-2x_3=4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3-8,\\x_2=2x_3+4.\end{cases}$$

x_3 еркін тәуелсізді t арқылы белгілесек, берілген жүйенің жалпы шешімін аламыз: $(-t-8; 2t+4; t)$. Енді дербес шешімін табу үшін, t – ға әр түрлі мәндер береміз:

Мысалы, $t=1$ болғанда $(-9; 6; 1)$ - дербес шешім. Бұл жүйенің матрицасы мен кеңейтілген матрицасының рангі 2-ге тең.

Жүйелердің шешімдерін Гаусс әдісімен табыңыз:

$$\textbf{2.114.}\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2,\\3x_1+2x_2+2x_3=-2,\\x_1-2x_2+x_3=1.\end{cases}\qquad \textbf{2.115.}\begin{cases}2x_1-4x_2+9x_3=28,\\7x_1+3x_2-6x_3=-1,\\7x_1+9x_2-9x_3=5.\end{cases}$$

$$\textbf{2.116.}\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2,\\2x_1-3x_2+2x_3=2,\\3x_1+x_2+x_3=8.\end{cases}\qquad \textbf{2.117.}\begin{cases}x_1-x_2+x_3=a,\\x_1+x_2-x_3=b,\\-x_1+x_2+x_3=c.\end{cases}$$

$$\textbf{2.118.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\x_1+x_2-x_3=0,\\4x_1-x_2+5x_3=3.\end{cases}\qquad \textbf{2.119.}\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=5,\\x_1-2x_2+2x_3=-5,\\7x_1+x_2-x_3=10.\end{cases}$$

$$\textbf{2.120.}\begin{cases}x_1-x_2-x_3=1,\\2x_1-2x_2-2x_3=2,\\3x_1-3x_2-3x_3=3,\end{cases}\qquad \textbf{2.121.}\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-x_4=2,\\4x_1+6x_2-2x_3-2x_4=4,\\6x_1+9x_2-3x_3-3x_4=6.\end{cases}$$

$$\textbf{2.122.}\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=2,\\2x_1+x_2+2x_3-3x_4=1,\\3x_1+2x_2+x_3-x_4=3.\end{cases}\qquad \textbf{2.123.}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\2x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0,\\3x_1+3x_2+5x_3-3x_4=0.\end{cases}$$